都留文科大学研究紀要　第88集（2018年10月）
The Tsuru University Review，No.88（October, 2018）

円周率の近似値の求め方に関する教材開発
― 小・中・高の系統的な扱いを視野に入れて ―

Development of Teaching Materials on How to Calculate the Approximate Value of the Ratio of Circumference:
Considering Cumulative Education between Elementary, Junior High, and High School

新　井　　　仁
ARAI Hitoshi

キーワード：円周率　近似値　漸化式　グラフ関数電卓

1．問題提起と研究の目的

学習指導要領（平成29年３月告示）及び解説では、円周率について次のように学習することが示されている。

小学校算数第５学年「平面図形の性質」 （１）ア㈤円周率の意味について理解し，それを用いること。 （３）< 前略 > 円周率は 3.14 を用いるものとする。

扱い方の具体について、児童が円の直径の長さと円周の長さとの間の関係に気づき、円周の長さは直径の長さの何倍になるか見通しを立てることを大切にする。例えば、**図１**のように円に内接する正六角形と円に外接する正方形を利用し、円周の長さは正六角形の周りの長さ（半径の６倍）より大きく、正方形の周りの長さ（直径の４倍）より小さいという見通しをもつことや、実際に幾つかの円について直径の長さと円周の長さを測定し、円の大きさに関係なく円周の長さの直径の長さに対する割合が一定であることを帰納的に導き、理解できるようにすることが求められ、この割合を円周率と定義し、3.14を用いるものと示されている。

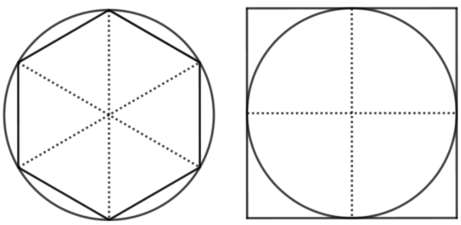


図１

中学校数学第１学年「空間図形」 （２）ア㈠扇形の弧の長さと面積，基本的な柱体や錐体，球の表面積と体積を求めること。< 後略 >

この内容について、円周の長さや円の面積を円周率 π を用いて表すことを扱ように示

されている。なお、円周率が無理数であることについては、第３学年「数の平方根の必要性と意味」において、有理数ではない数が存在することの理解が必要であり、その具体として円周率 3.14… を π を用いて表したのと同じように、数を記号$\sqrt{\ }$を用いて表していくことが示されている。

このようにして、小学校第５学年から中学校第３学年までの学習において、円周率を断片的に扱いながら、円周率は無理数なので分数で表現できないため π を用いて表し、その近似値として一般的に 3.14 が用いられるということに落ち着き、以後円周率そのものを学習の対象とすることはない。小学校第５学年の学習では、具体的な測定などによって円周率の存在や数値について学ぶことが位置付けられているが、その実態が無理数であることや、どのようにすればより正確な近似値が求められるのかなどの学習を行う機会はない。つまり、円周率が無理数であるということについて実感を伴った理解に至らないまま知識として受け入れ、あとは計算上必要な無理数の１つだということで済んでいるのが現状であろう。

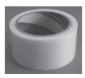
しかし、円周率は学習者にとってみれば初めて出会う無理数であるともいえるもので、正確な近似値を求める試みや、その計算速度と精度によってスーパーコンピュータの性能を判断する事実など、円周率そのものを対象とした学習に多くの魅力があると考える。このような立場から、円周率の近似値の求め方について、小・中・高の学習内容を見据え、系統的に扱える教材開発を試みたいと考えた。

２．円周率の近似値を帰納的に求める方法

（１）直径の長さと円周の長さの実測から求める試み

幾つかの円についての直径の長さと円周の長さを測定し、直径の長さに対する円周の長さの割合を求めることを想定し、「茶筒」「水筒」「マグカップ」「洗剤容器」「テープ」について調べた。直径の長さは定規で直接測定し、円周の長さは、円形の部分にたこ糸を巻き、その長さを測ることとした。その際、たこ糸は若干伸縮するので、伸びきるように引っ張って巻き付け、伸びきった状態で測定した。**表１**は、その結果である。なお、測定値はミリ単位、割合は小数点以下第２位を四捨五入した値である。

表１　５種類の円の測定結果

	茶筒	水筒	マグカップ	洗剤容器	テープ
直径の長さ（㎝）	24.0 	20.3 	21.8 	15.6 	31.2 
円周の長さ（㎝）	7.5 	6.5 	7.0 	4.8 	10.0 
(円周の長さ)÷(直径の長さ)	3.20	3.12	3.11	3.25	3.12

たこ糸の巻き具合、形状のゆがみ、測定誤差などはあるが、どれも３より若干大きく、円の大きさ（品物）が違っていても、直径の長さに対する円周の長さの割合は常に一定の値になりそうだという見通しをもつことが

できそうである。

ここでは5種類の品物による測定結果のみを示したが、児童が円柱形のようなものを自由に持ち寄り、数多くの円について測定することによって、直径の長さと円周の長さの関係に気づきやすく、見通しをもった学習になると考えられる。その上で、内接正六角形の周の長さが直径の3倍であることを根拠に、円周の長さはそれよりも大きいことを認め、円周率の近似値として 3.14 を用いることに帰着する学習が考えられる。ただし、測定結果の如何によるが、3.14 を用いることの根拠が乏しい状況であることは否めない。

（2）面積を重さに置き換えて求める試み

円の面積の求め方を「(円の面積)＝(半径)×(半径)×3.14」とするが、この式は「3.14＝(円の面積)÷{(半径)×(半径)}」と変形することができる。学習指導要領小学校算数編では、**図2**を示しながら、面積を求める公式が半径を1辺とする正方形の面積の 3.14 倍を意味していることについて、図と関連付けて理解できるようにすることが示されている。

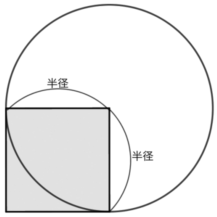


図2

小学校でのこのような学習を踏まえ、中学校では半径rの円の面積をSとして $S=\pi r^2$ と表すようになる。この式を変形して $\pi=\frac{S}{r^2}$ が得られ、これより、円周率について改めて「半径を1辺とする正方形（以後「正方形」と表記）の面積に対する円の面積の割合」とみることができる。したがって、円の面積と正方形の面積を測定し、その測定値から割合を計算すれば円周率になるはずである。しかし、円の面積を測定によって正確に求めることは困難である。

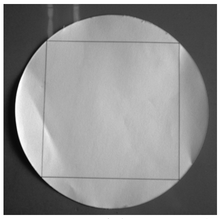


図3　円形濾紙(A)の内側に正方形(B)をかいた様子

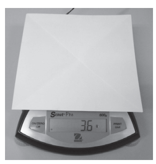
そこで、材質が均一である素材から図形を切り取る場合、重さと面積は比例するので、材質が均一な紙から上記の円と正方形を切り取り、面積の代わりに重さを測定し、その割合を計算して円周率を求めようと考えた。**図3**は、円形濾紙(A)に内接正方形(B)をかいた様子を示している。具体的には、次の手順で円周率の近似値を求める。

①円形濾紙(A)の重さをデジタルはかりで測定する。

②測定した円形濾紙から、そこに内接する正方形(B)を切り取り、この正方形濾紙の重さをデジタルはかりで測定する。

③正方形の対角線は直径(2r)なので、その面積は$2r^2$になる。したがって、②の結果を2でわることにより、r^2の値

表2　濾紙の重さによる測定結果

	感量 0.1 グラム	感量 0.01 グラム
① 円形濾紙の重さ(g)	5.6 	5.66 
② 正方形濾紙の重さ(g)	3.6 	3.60 
③ 正方形濾紙の重さの半分(g)	1.8	1.80
④　①÷③	3.111…	3.144…

を得る。

④ ①の測定値を③の値でわり、円周率の近似値を得る。

直径24㎝の大型円形濾紙を使い、感量0.1グラムのデジタルはかりと、感量0.01グラムのデジタルはかりの両方で実際に測定した結果は、**表２**の通りである。

３．円周率の近似値を代数的に求める方法

（１）三平方の定理を利用する試み

半径１の円に内接する正六角形の１辺の長さ(AB)をa_1とする(**図４ア**)。

△OAB は正三角形なので、$a_1=1$となり周の長さは６、これを直径の２でわると３なので、正六角形の周の長さを円周の長さと置き換えて円周率の近似値を求めると３になる。

次に、内接する正十二角形の周の長さを用いて、円周率の近似値を求める。正六角形の辺 AB の中点を M、直線 OM と円周との交点を P とする。△OAM は、∠AMO＝90°、OA＝1、AM＝$\dfrac{1}{2}$より、

$\mathrm{OM}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$ となる。ここで、正十二角形の１辺 AP の長さをa_2とする（**図４イ・ウ**）。**ウ**のように、△AMP は∠AMP＝90°、AM＝$\dfrac{1}{2}$だから、

$\mathrm{MP}=\mathrm{OP}-\mathrm{OM}=1-\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$ 、これより、

$$a_2=\sqrt{\mathrm{AM}^2+\mathrm{MP}^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left\{1-\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

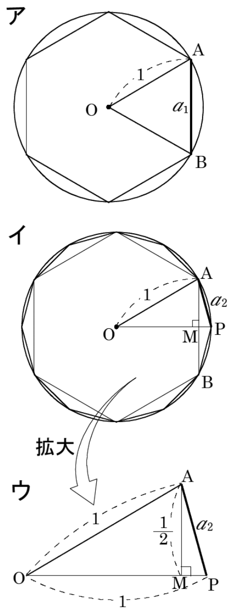


図４　円に内接する正多角形とπ

となる。計算結果には二重根号を含むが、この式を導く過程では三平方の定理を用いたり、根号内を計算したりしているだけであるため、中学校３学年までの内容で式を導き出すことはできる。

a_2は正十二角形の１辺の長さなので$12a_2$が１周の長さとなり、その周の長さは

$$12a_2=12\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left\{1-\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^2}=12\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

と得られる。これを半径１の円周の長さと置き換えるので、これを直径の２でわった値、つまり$6a_2$が円周率の近似値となる。二重根号を外す計算は中学生にはできないが、$\sqrt{3}$を例えば 1.732 と近似値で表し、計算機を使えば結果は得られる。ただ、手計算が困難であり、また、計算方法そのものが

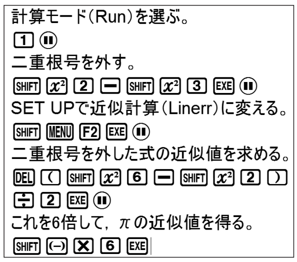


図５　グラフ関数電卓のキー操作①

学習内容ではないこのような場面では、積極的にテクノロジーを活用したい。具体例として、C 社のグラフ関数電卓（以後「グラフ関数電卓」と表記）で$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ の二重根号を外し、その近似値を求め、さらにその結果を 6 倍して円周率の近似値を求める方法を示すと、キー操作は**図 5** の通りで、これに対応して画面上では**図 6** のように表示される。

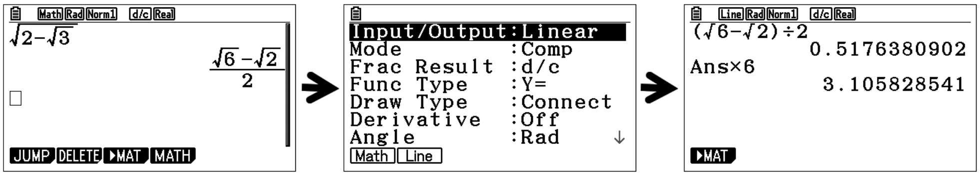


図 6　グラフ関数電卓の画面表示①

「手計算ができないから扱わない」という発想から、「難しい計算はテクノロジーに任せることにより、レベルの高い数学に触れる」という発想への転換が大切だと考える。

この後、さらに正十二角形の各辺の中点をとって正二十四角形として同様に考え、以後同じ操作を繰り返すことを考える。正六角形から正十二角形にしたことによって図形として円に近づき、円周率の近似値の精度が増したことと同様、さらに円に近づけることで円周率の近似値も一層精度が増すことになる。そのため、学習者の関心は、正二十四角形にすると円周率の近似値はどこまで正確に求められるのか、その先はどうなるのか、ということに向くものと考える。

（2）三平方の定理の利用から漸化式へ

正十二角形の一部を示した**図 4 ウ**の弧 AP の中点を P’とすると、AP’が正二十四角形の 1 辺になり、この長さをa_3とする。また、AP と OP’の交点を M’ とする。**図 7** はその様子を示している。なお、∠AM’O ＝90° が捉えやすくなるよう、図形の位置を調整している。

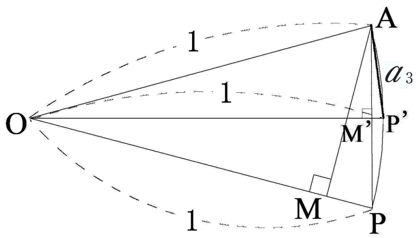


図 7　正二十四角形の一部

a_3を求める手順は、次のようになる。

$$\mathrm{AM'}=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left\{1-\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^2}$$

$$\mathrm{OM'}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AM'}^2}=\sqrt{1^2-\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left\{1-\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^2}\right]^2}$$

$$\mathrm{M'P'}=\mathrm{OP'}-\mathrm{OM'}=1-\sqrt{1^2-\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left\{1-\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^2}\right]^2}$$

$$a_3=\sqrt{\mathrm{AM'}^2+\mathrm{M'P'}^2}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left\{1-\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^2}\right]^2+\left[1-\sqrt{1^2-\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left\{1-\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^2}\right]^2}\right]^2}$$

正十二角形から正二十四角形をかいて計算式を求めるとかなり複雑な式になるが、最初に求めた式が次の式の一部となり、さらにその結果を次の式の一部として使うという構造

になっていることがわかる。つまり、これまで正3×2^{n}角形の１辺の長さをa_nで表しており、a_nがわかれば正$3\times2^{n+1}$角形の１辺の長さa_{n+1}が求められ、これを用いて円周率の近似値を求めることができるのだから、n を大きくすることで限りなく円周率の近似値の精度を高めていくことができるということになる。

しかし、これはa_nとa_{n+1}との関係（漸化式）の処理なので、手計算では手に負えない。だから“扱わない”のか、それとも“その価値を取り上げる”のか、教師の教材観で判断が変わるだろう。私は、後者であってほしいと願う。中学校では正十二角形を用いた計算の程度が限界だと思われるが、求め方のプロセスは高等学校での学習の漸化式を導くための重要な手がかりとなることは間違いない。したがって、中学校段階で正六角形の周の長さを用いた近似値を求め、同じことを繰り返して正十二角形について考え、そのプロセスについて学習しておくことにより、高等学校での学習につながっていくことが期待できると考える。

では、高等学校で学習する漸化式を活用し、円に内接する正$3\times2^{n+1}$角形（n は自然数）を用いて円周率の近似値を求める方法を考える。作図の手順は、次の通りである。

・円に内接する正3×2^{n}角形の各辺の中点をとり、円の中心Ｏから、正3×2^{n}角形の各辺の中点を通る3×2^{n}本の半直線を引く。
・3×2^{n}本の半直線と円周との3×2^{n}個の交点を決め、その3×2^{n}個の交点と、円に内接する正3×2^{n}角形の3×2^{n}個の頂点を順に結び、正$3\times2^{n+1}$角形をつくる。

これに基づいて漸化式を求めると**図８**、これを用いて正多角形の１辺の長さを順次求めると**図９**のようになる。

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+\left\{1-\sqrt{1^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+1-2\sqrt{1^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}+\left\{\sqrt{1^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\frac{a_n^{\,2}}{4}+1-2\sqrt{\frac{4-a_n^{\,2}}{4}}+\left(1-\frac{a_n^{\,2}}{4}\right)} \\
&= \sqrt{2-\sqrt{4-a_n^{\,2}}}
\end{aligned}
$$

図８　漸化式を求める過程

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= \sqrt{2-\sqrt{3}} \\
a_3 &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\
a_4 &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+3}}} \\
a_5 &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+3}}}} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

図９　正多角形の１辺の長さ

漸化式は、数学的な状況を把握するために有効な数式ではあるが、そのものを解くことはできない。したがって、漸化式をつくってみてもその恩恵を得ることはあまりなく、漸化式のよさや価値について認識する場面は少ない。

図８で示した漸化式を解くとことはできないが、n の値をある程度大きくして計算結果を求め、円周率の近似値がどれくらいの精度で求められるかを確認することによって、漸化式の価値を認め

《準備》Run・Matrixを選択し，自然表示に設定する。
[1] [SHIFT] [MENU] [F1] [EXE] [MENU] (II)
再帰機能（Recursion）を選択し，an+1に漸化式を記述する。
[8] [SHIFT] [x^2] [2] [−] [SHIFT] [x^2] [4] [−] [F2] [x^2] [EXE] (II)
開始（START）を1，終了（END）を12とする。
[F5] [1] [EXE] [1] [2] [EXE] (II)
初項（a1）を正六角形を用いた近似値である1として，漸化式を記述した画面に戻る。[1] [EXE] [EXE] (II)
設定に従って計算結果を得る。[EXE]
円に内接する正3×2^(n＋1)角形について計算された1辺の長さのうち，最も精度が高い末項を確認して記述する。
(▶) (▼) (▼) (▼) (▼) (▼) (▼) (▼) (▼) (▼) (▼) (▼) (II)
Run・Matrix機能を選択し，3×2^nに，記録された1辺の長さをかける。
[MENU] [1] [3] [×] [2] [∧] [1] [1]
(▶) [×] [5] [・] [1] [1] [3] [2] [6] [9] [2] [0] [9] [×] [1] [0]
[∧] [(−)] [4] [EXE] (II)

図10　グラフ関数電卓のキー操作②

ることは可能である。ただし、計算は容易ではない。そこで、グラフ関数電卓を活用し、この漸化式から円に内接する正 3×2^{12} 角形の１辺の長さを求め、これに基づいて円周率の近似値を求めることを試みた。その手順は**図10**の通りで、これに対応して画面上では**図11**のように表示される。

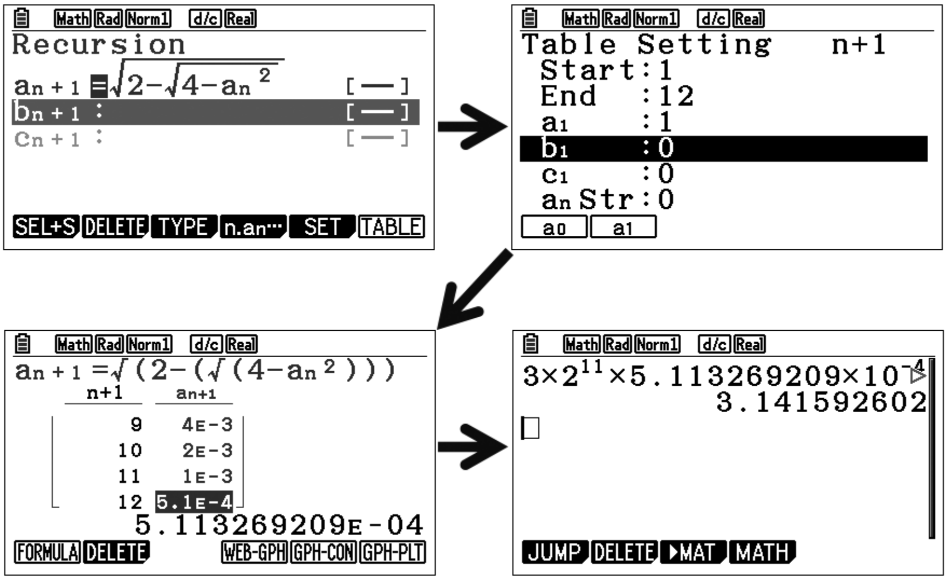


図11　グラフ関数電卓の画面表示②

結果として、3.141592602 が得られ、かなり高い精度で求めることができる。

なお、正 3×2^{12} 角形を実際に定規とコンパスで作図することは恐らく物理的に不可能であり、作図ツールで作図すればほぼ円に見えることもわかるだろう。

４．レベルの高い数学の指導に向けて

円周率の近似値は、小学校での具体物による簡単な測定から始まり、高等学校での漸化式による方法まで、学習者の発達段階に応じて近似値を求めることが可能であり、徐々に精度を高めていくことができる。また、グラフ関数電卓を使うことにより、無理なく学習を成立させることができる。このような授業を構想することで、レベルの高い数学を使える人間の育成につながるものと考える。

一般に、手計算で処理できない内容は授業で扱いにくいと考えられ、扱わない傾向が強い。しかし、数学が「使える」ことを大切にするのなら、「手計算ではできないから、学習内容として扱わない」と消極的に考えるのでは

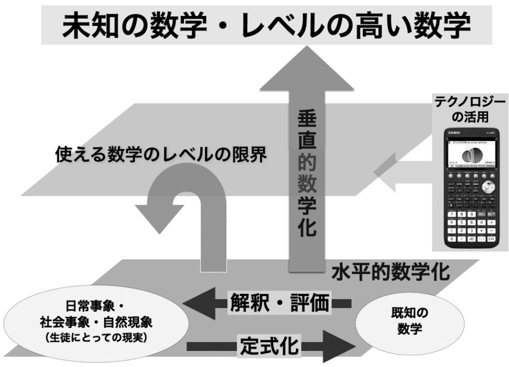


図12　水平的数学化と垂直的数学化のイメージ

なく、「難しい計算はグラフ関数電卓などのテクノロジーに任せることで、レベルの高い数学を学ぶことができ、使えるようになる」と積極的に考えたい。そして、いずれ計算のプロセスを考える必要が出てきたときに改めて考えればよい。

日常事象や現実事象から定式化したり、定式化したことについて既習の数学を用いて解釈・評価したりする学習は大切である。しかし、その範囲で留まるとすれば水平的数学化に終始し、発展性に乏しい学びにならざるを得ない。これに対し、学習者が新たな数学に触れ、創造し、獲得していく学習を目指したい。しかし、使える数学のレベルには限界がある。その限界をテクノロジーの活用によって打開し、未知の数学・レベルの高い数学の学習を可能にする垂直的数学化を目指したい（**図12**）。

なお、円周率を取り上げた問題が、いずれも2003年に下記の２校の入試で出題された。
【東京大学】「円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。」
【大阪大学】「π を円周率とする。＜漸化式に関わる設問(1) (2)に続き＞
(3) π が無理数であることを示せ。」

《参考文献》

新井仁「理想カリキュラムに基づいた「生かす数学」の実践的研究：「事象と関数」に焦点を当てて」『数学教育論文発表会論文集』41，2008年，pp.57-62

新井仁・小口祐一「中学校数学における円周率πの近似に関する指導：高等学校における漸化式による学習を展望して」『数学教育論文発表会論文集』44(1)，pp.456-470

文部科学省『学習指導要領 (平成29年告示) 解説算数編』，2017年７月，pp.248-252，pp.296-298

文部科学省『学習指導要領 (平成29年告示) 解説中学校数学編』，2017年７月，pp.78-82，p.134

Received : May, 16, 2018
Accepted : June, 13, 2018