都留文科大学電子紀要の著作権について

都留文科大学附属図書館
住所：402山梨県都留市田原三丁目8番1号
電話：0554-43-4341(代)
FAX: 0554-43-9844
E-Mail: library@tsuru.ac.jp

電子紀要トップへ

有限可換群の、部分群の個数を求める計算法

Formula of the Number of Subgroups of a Finite Abelian Group

清　田　秀　憲
KIYOTA　Hidenori

abstract

A finite Abelian group is decomposed into a direct product of subgroups of prime-power orders.These subgroups are commutative p-groups,known p-Sylow groups.Every commutative p-group S is decomposed into a direct product of cyclic subgroups $C(p^{k_1})\times C(p^{k_2})\times\cdots C(p^{k_t})$, by an abbreviated notation $(k_1, k_2, \cdots, k_t)$. Let H be a type $(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ subgroup of S. First, we make bases $(a_1, a_2, \cdots, a_s)$ such that a_i's $(i= 1 \cdots s)$ are elements of S of order p^{h_i}. Then we prove that there are

$$(p^{f(h_1)}-p^{f(h_1-1)})(p^{f(h_2)}-p^{f(h_2-1)+1})\cdots(p^{f(h_s)}-p^{f(h_s-1)+s-1})$$

basis. Similarly, there are

$$(p^{g(h_1)}-p^{g(h_1-1)})(p^{g(h_2)}-p^{g(h_2-1)+1})\cdots(p^{g(h_s)}-p^{g(h_s-1)+s-1})$$

basis of H. We prove that the number of type $(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ subgroups of S is

$$\frac{\Pi_{i=1}^{s}(p^{f(h_i)}-p^{f(h_i-1)+i-1})}{\Pi_{i=1}^{s}(p^{g(h_i)}-p^{g(h_i-1)+i-1})}.$$

Then we have a theorem to compute those of a finite Abelian group.

１．概　要

可換群Gにおいて、Gの位数をnとし、nの素因数分解を$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_w^{e_w}$とする。各$p_i^{e_i}$を位数にもつ部分群を$S_i$とすると$G=S_1\times S_2\times\cdots\times S_w$のように直積分解される。各$S_i$は$G$の$P_i-S$ylow部分群とよばれている。各$S_i$の部分群の個数を求めることができれば、$G$の部分群の個数を求めることができる。そこで$P-S$ylow部分群$S$つまり可換$P$群$S$が、$C(p^{k_1})\times C(p^{k_2})\times\cdots\times C(p^{k_t})$のように位数$p^{k_i}$の巡回部分群$C(p^{k_i})$の直積に分解されたとして、可換$P$群$S$の部分群の個数を計算する公式を証明する。

ここで新しい記号を定義する。$C(p^k)$を(k)、$C(p^{k_1})\times C(p^{k_2})\times\cdots\times C(p^{k_t})$を$(k_1, k_2, \cdots, k_t)$と簡単に表わす。ただし、$k_1\geqq k_2\geqq\cdots\geqq k_t$とする。

また整数αに対して$f_S(\alpha)=\Sigma_{i=1}^{t}\min(k_i, \alpha)$によって可換$P$群$S=(k_1, k_2, \cdots, k_t)$上の極小値関数と呼ばれる関数$f_S$を定義する。

可換P群Sの型を$(k_1, k_2, \cdots, k_t)$とし、Sの一つの部分群Hの型を$(h_1, h_2, \cdots, h_s)$とするとき、Sの元の集合から位数p^{h_i}の元を順々に取り出して底を作り$(h_1, h_2, \cdots, h_s)$型の部分群

を作る。その個数は次の定理として証明される。

[補題３] S の型を $(k_1, k_2, \cdots, k_t)$ とするとき、$S=(k_1, k_2, \cdots, k_t)$ の上の極小値関数をfとすれば、S の部分群で $(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ 型のものの個数 A は
$A=(p^{f(h_1)}-p^{f(h_1-1)})(p^{f(h_2)}-p^{f(h_2-1)+1})\cdots(p^{f(h_s)}-p^{f(h_s-1)+s-1})$。
同じように、H から底を選び、$(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ 型の群を作る。
$H=(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ の上の極小値関数を g とすれば、その個数 B は
$B=(p^{g(h_1)}-p^{g(h_1-1)})(p^{g(h_2)}-p^{g(h_2-1)+1})\cdots(p^{g(h_s)}-p^{g(h_s-1)+s-1})$。

[定理１] $(k_1, k_2, \cdots, k_t)$ 型の群の $(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ 型の部分群の個数は上の A ,B を使って、
$f(h_i)-f(h_i-1)=m_i$、$g(h_i)-g(h_i-1)=n_i$ とおくと、

$$A/B=\frac{\Pi_{i=1}^{s} p^{f(h_i-1)}(p^{m_i}-p^{i-1})}{\Pi_{i=1}^{s} p^{g(h_i-1)}(p^{n_i}-p^{i-1})}.$$

となる。

２．指定された位数を持つ、元の集合

[定義１] 整数 α に対して群 $S=(k_1, k_2, \cdots, k_t)$ 上で定義される関数
$f_s(\alpha)=\Sigma_{i=1}^{t}\min(k_i, \alpha)$ を S の上の極小値関数という。

[補題１] 可換 P 群 $S=(k_1, k_2, \cdots, k_t)$ の元のうち、位数が p^α 以下の元の個数は $p^{f(\alpha)}$ 個ある。

[証明] 各直積成分 $C(p^{k_i})$ において、位数が p^α 以下の元全体の作る部分群を K_i とする。$1\leqq\alpha\leqq k_i$ のときは、K_i は一意的に定まり、K_i の位数は p^α である。$k_i\leqq\alpha$ のときは $K_i=C(p^{ki})$ で、その位数は p^{k_i}。従って S の位数が p^α 以下の元全体のつくる群 K は、$K=K_1\times K_2\times\cdots\times K_t$。すなわち、極小値関数を使って、

$$|K|=|K_1|\times|K_2|\times\cdots\times|K_t|=p^{\Sigma\min(k_i,\ \alpha)}=p^{f(\alpha)}$$

である。

[補題２] 可換 P 群 S の元のうち、位数が p^α の元は

$$p^{f(\alpha)}-p^{f(\alpha-1)}$$

個ある。

[証明] S の位数 p^α 以下の元全体の集合を K と位数 $p^{\alpha-1}$ 以下の元全体の集合を H とすると、S の位数 p^α の元全体の集合は $K-H$ となる。補題2.1より $|K-H|=|K|-|H|=p^{f(\alpha-1)}$ となる。

３．底の選び方

$(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ 型の部分群の底を次のようにして選んでいくことができる。

a_1の取り方

a_1はSの位数p^{h_1}の元をとればよい。Sの位数p^{h_1}の元は$p^{f(h_1)}-p^{f(h_1-1)}$個あるからa_1の選び方は$p^{f(h_1)}-p^{f(h_1-1)}$通りある。

a_2の取り方

Sの位数p^{h_2-1}以下の元のつくる部分群をH_2とすると、Sの位数p^{h_2}の元は$p^{f(h_2)}-p^{f(h_2-1)}$個ある、その中から、a_1H_2によって生成される部分群$\langle a_1H_2\rangle$に属さないものを選んでa_2とする。すると$\langle a_1\rangle\cap\langle a_2\rangle=\{e\}$となる。

なぜなら、$\langle a_1\rangle\cap\langle a_2\rangle\neq\{e\}$とすると$S$は可換だから位数$p$の元$z$で $z\in\langle a_1\rangle\cap\langle a_2\rangle$となるものがある。従って、$a_1^{ip^{h_1-1}}=z$, $a_2^{p^{h_2-1}}=z^j$となる整数i, jが存在する。そのとき

$$(a_2a_1^{-ijp^{h_1-h_2}})^{p^{h_2-1}}=e$$

より$a_2\in\langle a_1H_2\rangle$となり$a_2$の取り方に反する。

$\langle a_1H_2\rangle$の中で位数p^{h_2}の元は

$$a_1^{p^{h_1-h_2}}H_2\cup a_1^{2p^{h_1-h_2}}H_2\cup\cdots\cup a_1^{(p-1)p^{h_1-h_2}}H_2$$
$$=\bigcup_{i=1}^{p-1}a_1^{ip^{h_1-h_2}}H_2$$

だけある。この個数は $(p-1)|H_2|=(p-1)p^{f(h_2-1)}$。従って$a_2$は$p^{f(h_2)}-p^{f(h_2-1)}-(p-1)\times p^{f(h_2-1)}=p^{f(h_2)}-p^{f(h_2-1)+1}$個の中から選ぶことができる。

a_3の取り方

Sの位数p^{h_3-1}以下の元のつくる部分群をH_3とすると、Sの位数p^{h_3}の元は$p^{f(h_3)}-p^{f(h_3-1)}$個ある、その中から、a_1H_3, a_2H_3によって生成される部分群$\langle a_1H_3\rangle\times\langle a_2H_3\rangle$に属さないものを選んで$a_3$とする。すると$\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\cap\langle a_3\rangle=\{e\}$となる。

なぜなら、$\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle\cap\langle a_3\rangle\neq\{e\}$とすると$S$は可換だから位数pの元zで$z\in\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\cap\langle a_3\rangle$となるものがある。となるから$a_1^{ip^{h_1-1}}a_2^{jp^{h_2-1}}=z$, $a_3^{p^{h_3-1}}=z^k$となる整数i, j, kが存在する。そのとき

$$(a_3a_1^{-ikp^{h_1-h_3}}a_2^{-ikp^{h_2-h_3}})^{p^{h_3-1}}=e$$

より$a_3\in\langle a_1H_3\rangle\times\langle a_2H_3\rangle$となり$a_3$の取り方に反する。

$\langle a_1H_3\rangle\times\langle a_2H_3\rangle$の中で位数$p^{h_3}$の元は

$$\bigcup_{0\leqq i,j\leqq p-1\quad (i,j)\neq(0,0)} a_1^{ip^{h_1-h_3}}a_2^{jp^{h_2-h_3}}H_3$$

だけある。この個数は $(p^2-1)|H_3|=(p^2-1)p^{f(h_3-1)}$。従って$a_3$は$p^{f(h_3)}-p^{f(h_3-1)}-(p^2-1)\times p^{f(h_3-1)}=p^{f(h_3)}-p^{f(h_3-1)+2}$個の中から選ぶことができる。

以下同様に$a_1, a_2, \cdots, a_s$と選び続ける。その選び方は全部で

$$(p^{f(h_1)}-p^{f(h_1-1)})(p^{f(h_2)}-p^{f(h_2-1)+1})\cdots(p^{f(h_s)}-p^{f(h_s-1)+s-1})$$

通りの選び方がある。

[補題 3] $(k_1, k_2, \cdots, k_t)$型の可換P群の元から底を選んで$(h_1, h_2, \cdots, h_s)$型の部分群の作り方の数は、

$$\Pi_{i=1}^{s}P^{f(h_i-1)}(p^{m_i}-P^{i-1})$$

である。

4．$(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ 型の部分群の個数

3．で作った底の中で、同一の部分群Hの底となっているものを数える。3．ではSから $(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ 型の部分群の底を選んだが、同じやり方で、HからHの底を選ぶと、その個数は、Hの型を $(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ として指数の極小値関数をgとすると、

$$(p^{g(h_1)}-p^{g(h_1-1)})(p^{g(h_2)}-p^{g(h_2-1)+1})\cdots(p^{g(h_s)}-p^{g(h_s-1)+s-1})$$

となる。従って次の定理が証明できた。

[定理１] $(k_1, k_2, \cdots, k_t)$ 型の可換P群の $(h_1, h_2, \cdots, h_s)$ 型の部分群の個数は、

$$\frac{\Pi_{i=1}^{s} p^{f(h_i-1)}(p^{m_i}-p^{i-1})}{\Pi_{i=1}^{s} p^{g(h_i-1)}(p^{n_i}-p^{i-1})}$$

となる。

5．部分群の個数の求めかたの実例

可換P群$G=C(p^3)\times C(p^2)\times C(p)=(3, 2, 1)$ のとき、その元を位数ごとに分類し、部分群の個数を求める。

1．(3, 2, 1) 型

位数がp^3の元の個数は$p^{f(3)}-p^{f(2)}=p^5(p-1)$

位数がp^2の元の個数は$p^{f(2)}-p^{f(1)}=p^3(p^2-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{f(1)}-p^{f(0)}=p^3-1$

で１．の型のGの部分群の個数は１である。

2．(2, 2, 1) 型

位数がp^2の元の個数は$p^{g(2)}-p^{g(1)}=p^3(p^2-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p^3-1$

で２．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^3(p^2-1)p^3(p^2-p)(p^3-p^2)}{p^3(p^2-1)p^3(p^2-p)(p^3-p^2)}=1$である。

3．(3, 1, 1) 型

位数がp^3の元の個数は$p^{g(3)}-p^{g(2)}=p^4(p-1)$

位数がp^2の元の個数は$p^{g(2)}-p^{g(1)}=p^3(p-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p^3-1$

で３．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^5(p-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{p^4(p-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}=p$である。

4．(3, 2) 型

位数がp^3の元の個数は$p^{g(3)}-p^{g(2)}=p^4(p-1)$

位数がp^2の元の個数は$p^{g(2)}-p^{g(1)}=p^2(p^2-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p^2-1$

で４．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^5(p-1)p^3(p^2-p)}{p^4(p-1)p^2(p^2-p)}=p^2$である。

5．(2, 1, 1) 型

位数がp^2の元の個数は$p^{g(2)}-p^{g(1)}=p^3(p-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p^3-1$

で5．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^3(p^2-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{p^3(p-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}=p+1$である。

6．(2, 2) 型

位数がp^2の元の個数は$p^{g(2)}-p^{g(1)}=p^2(p^2-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p^2-1$

で6．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^3(p^2-1)p^3(p^2-p)}{p^2(p^2-1)p^2(p^2-p)}=p^2$である。

7．(3, 1) 型

位数がp^3の元の個数は$p^{g(3)}-p^{g(2)}=p^3(p-1)$

位数がp^2の元の個数は$p^{g(2)}-p^{g(1)}=p^2(p-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p^2-1$

で7．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^5(p-1)(p^3-p)}{p^3(p-1)(p^2-p)}=p^3+p^2$である。

8．(1, 1, 1) 型

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p^3-1$

で8．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}=1$である。

9．(2, 1) 型

位数がp^2の元の個数は$p^{g(2)}-p^{g(1)}=p^2(p-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p^2-1$

で9．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^3(p^2-1)(p^3-p)}{p^2(p-1)(p^2-p)}=p^3+2p^2+p$である。

10．(3) 型

位数がp^3の元の個数は$p^{g(3)}-p^{g(2)}=p^2(p-1)$

位数がp^2の元の個数は$p^{g(2)}-p^{g(1)}=p(p-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p-1$

で10．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^5(p-1)}{p^2(p-1)}=p^3$である。

11．(1, 1) 型

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p^2-1$

で11．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{(p^3-1)(p^3-p)}{(p^2-1)(p^2-p)}=p^2+p+1$である。

12．(2) 型

位数がp^2の元の個数は$p^{g(2)}-p^{g(1)}=p(p-1)$

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p-1$

で12．の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^3(p^2-1)}{p(p-1)}=p^3+p^2$である。

13．(1) 型

位数がp^1の元の個数は$p^{g(1)}-p^{g(0)}=p-1$

で12. の型のGの部分群の個数は$\frac{A}{B}=\frac{p^3-1}{p-1}=p^2+p+1$である。

以上まとめると、可換P群$G=C(p^3)\times C(p^2)\times C(p)=(3, 2, 1)$の位数$p^\alpha$の部分群の個数を$\psi(p^\alpha)$で表わすと、

$\psi(p^6)=1$

$\psi(p^5)=1+p+p^2$

$\psi(p^4)=1+p+2p^2+p^3$

$\psi(p^3)=1+p+2p^2+2p^3$

$\psi(p^2)=1+p+2p^2+p^3$

$\psi(p^1)=1+p+p^2$

$\psi(p^0)=1$

のように、上下が対称的になる。上下が対称的になることはBirkhoff[1]が証明した。

一般的に、有限可換群Gの位数をnとして、nの素数分解を$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_w^{e_w}$とする。各素数$p_i$に対して$P_i$−Sylow群を考えると

$$G=S_1\times S_2\times\cdots\times S_w$$

である。さらに各S_iの直積分解が定められているときのGの部分群の個数を求めてみよう。Gの部分群Hをとり、$H_i=H\cap S_i$はHが動くとH_iは可換P_i群の部分群として動き、また各S_iの部分群を自由にとり直積をつくればGの部分群になる。mをnの約数として$m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_w^{a_w}$とすると$0\leqq a_i\leqq e_i$となる。$\psi(m)$を$G$の位数mの部分群の個数、$\psi_i(p_i^{a_i})$を$S_i$の位数$p_i^{a_i}$の部分群の個数を表わすとする。上に述べたことから、つぎの定理が成り立つ。

［定理２］ $\psi(m)=\psi_1(p_1^{a_1})\psi_2(p_2^{a_2})\cdots\psi_w(p_w^{a_w})$

６．おわりに

上下の対称性はG.Birkhoff(1)が証明しているが、ここの理論を使って別の証明を試みたい。そのために、証明の大筋を上の実例を使って書いておく。

$G=(3, 2, 1)$ $(p=2)$を、底を使って$[a]\times[b]\times[c]$と表わす。部分群を位数ごとに分類して、$[a^4]$を含むか否かでわけると、

$\psi(p^6)=1$だから$[a][b][c]$の１個。

$\psi(p^5)=1+p+p^2=7$

(2, 2, 1)型は$[a^2][b][c]$の１個、

(3, 1, 1)型は$[a][b^2][c]$, $[ab][b^2][c]$の２個、

(3, 2)型は$[a][b]$, $[ac][b]$, $[a][bc]$, $[ac][bc]$の４個。

$\psi(p^2)=1+p+2p^2+p^3=19$

(2, 1, 1)型は$[a^2][b^2][c]$, $[b][a^4][c]$, $[a^2b][a^4][c]$の３個、

(2, 2)型は$[a^2][b]$, $[a^2][bc]$, $[a^2c][b]$, $[a^2c][bc]$の４個、

(3, 1)型は$[a][b^2]$, $[ab][b^2]$, $[ac][b^2]$, $[abc][b^2]$, $[a][c]$, $[ab][c]$, $[ab^2][c]$, $[ab^3][c]$,

$[a][b^2c]$, $[ab][b^2c]$, $[ab^2][b^2c]$, $[ab^3][b^2c]$の12個。
$\psi(p^3)=1+p+2p^2+2p^3=27$
(1, 1, 1)型で$[a^4]$を含むものは$[a^4][b^2][c]$の１個、
(2, 1)型で$[a^4]$を含むものは$[b][a^4]$, $[bc][a^4]$, $[a^2][b^2]$, $[a^2][c]$, $[a^2][b^2c]$, $[a^2b][b^2]$,
$[a^2b^2][c]$, $[a^2b^2][b^2c]$, $[a^2c][b^2]$, $[a^2bc][a^4]$の10個、
(3)型で$[a^4]$を含むものは$[a]$, $[ab]$, $[ab^2]$, $[ab^3]$, $[ac]$, $[abc]$, $[ab^2c]$, $[ab^3c]$の８個。
(2, 1)型で$[a^4]$を含まないものは、$[b][c]$, $[b][a^4c]$, $[bc][a^4c]$, $[a^2b][c]$,
$[a^2b][a^4c]$, $[a^2b^3][c]$, $[a^2b^3][a^4c]$, $[a^4b][c]$の８個。
$\psi(p^2)=1+p+2p^2+p^3=19$
(1, 1)型で$[a^4]$を含むものは$[a^4][b^2]$, $[a^4][c]$, $[a^4][b^2c]$の３個、
(2)型で$[a^4]$を含むものは$[a^2]$, $[a^2b^2]$, $[a^2c]$, $[a^2b^2c]$の４個。
(1, 1)型で$[a^4]$を含まないものは、$[b^2][c]$, $[b^2][a^4c]$, $[a^4b^2][c]$, $[a^4c][a^4b^2]$の４個。
(2)型で$[a^4]$を含まないものは、$[b]$, $[bc]$, $[a^2b]$, $[a^2b^3]$, $[a^2b^3c]$, $[a^4b]$, $[a^4bc]$, $[a^2bc]$
の８個。
$\psi(p^1)=1+p+p^2=7$
(1)型で$[a^4]$を含むものは$[a^4]$の１個、
(1)型で$[a^4]$を含まないものは、$[b^2]$, $[c]$, $[b^2c]$, $[a^4b^2]$, $[a^4c]$, $[a^4b^2c]$の６個。
$\psi(p^0)=1$型は$\{e\}$の１個。

$G=(3, 2, 1)$を$[a^4]$で剰余群を作ると、$G/[a^4]=G \fallingdotseq (2, 2, 1)$ができる。$G$の部分群で$[a^4]$を含まない部分群は 0 つまり消去すると$G$ になる。$[a^4]$を含まない部分群は、$(2, 1)=[b][c]$の部分群の生成元に、$\{a^k\}$をかけた生成元を持つ部分群であるはず。
位数pの部分群は(1)型の$[b^2]$, $[c]$, $[b^2c]$に$\{e, a^4\}$をかけたものをあわせて
$[b^2]$, $[c]$, $[b^2c]$, $[a^4b^2]$, $[a^4c]$, $[a^4b^2c]$の６個になる。
位数p^2の部分群で、(1, 1)型で、$[a^4]$を含まないものは$[b^2][c]$、b^2に$\{e, a^4\}$をかけ、cに$\{e, a^4\}$をかけたものを合わせて
$[b^2][c]$, $[b^2][a^4c]$, $[a^4b^2][c]$, $[a^4b^2][a^4c]$の 4 個と、(2)型で、$[a^4]$を含まないものは
$[b]$, $[bc]$、これに$\{e, a^2, a^4, a^6\}$をかけたものを合わせて
$[b]$, $[a^2b]$, $[a^4b]$, $[a^6b]$, $[bc]$, $[a^2bc]$, $[a^4bc]$, $[a^6bc]$の８個の計12個。
位数p^3の部分群で、(2, 1)型で、$[a^4]$を含まないものは$[b][c]$。bに $\{e, a^2, a^4, a^6\}$をかけ、cに$\{e, a^4\}$をかけたものを合わせて
$[b][c]$, $[a^2b][c]$, $[a^4b][c]$, $[a^6b][c]$,
$[b][a^4c]$, $[a^2b][a^4c]$, $[a^4b][a^4c]$, $[a^6b][a^4c]$ の８個。
まとめると、$\delta_0=1$, $\delta_1=p+p^2$, $\delta_2=p^2+p^3$, $\delta_4=p^3$
$G=(3, 2, 1)$の位数p^kの部分群の個数を$\psi(k)$、$G' \fallingdotseq (2, 2, 1)$の位数$p^k$の部分群の個数を
$\psi(k)$ で表わすと
$\psi(p^5)=1$
$\psi(p^4)=1+p+p^2$
$\psi(p^3)=1+p+2p^2+p^3$
$\psi(p^2)=1+p+2p^2+p^3$

$\psi(p^1)=1+p+p^2$
$\psi(p^0)=1$

$\psi(p^6)=1=\psi(p^5)$
$\psi(p^5)=1+p+p^2=\psi(p^4)$
$\psi(p^4)=1+p+2p^2+p^3=\psi(p^3)$
$\psi(p^3)=1+p+2p^2+2p^3=\psi(p^2)+\delta^3=\psi(p^2)+p^3$
$\psi(p^2)=1+p+2p^2+p^3=\psi(p^1)+\delta^2=\psi(p^1)+p^2+p^3$
$\psi(p^1)=1+p+p^2=\psi(p^0)+\delta^4=\psi(p^0)+p+p^2$
$\psi(p^0)=1=\delta^0=1$

などを調べ、一般の場合の対称性の厳密な証明は今後の課題としたい。

尚、この論文は(3)清田 秀憲「可換群の部分群の個数の計算法」都留大紀要42号（1995年）を理博古家久子氏のアドバイスにより証明等を簡潔にしたものである。氏に感謝申しあげる。

参考文献

(1) G.Birkhoff, SUBGROUPS OF ABELIAN GROUPS （1833）
(2) 大島 勝著、「群論」共立出版（1954）
(3) 清田 秀憲著、「可換群の部分群の個数の計算法」都留大紀要42号（1995年）