

統計モデルの作成と解釈における 学習者の思考に関する研究 — 桜の開花予想を事例として —

A Study on Learners' Thinking in Creating and Interpreting Statistical Models: Case Study of Predicting the Blossoming Date of Cherry Blossoms

新 井 仁

ARAI Hitoshi

要 約

本研究の目的は、統計モデルの作成と解釈における学習者の思考について考察することにより、統計資料のモデル化を取り入れた問題解決学習に対する示唆を得ることである。この目的を具現するために、筆者が行った「桜の開花予想」の授業における学習者の思考について考察することにより、教材「桜の開花予想」の価値や発展性を明らかにすることを試みた。その結果、良質な思考であるクリティカルな思考を促すための私見として、問題に内在する4つの基本要素である「目標・道具・操作・制約」に基づいて整理する活動を位置付けること、及び、不自然な部分や矛盾を指摘できるようにすることの有効性を述べるに至った。

キーワード 桜の開花予想 統計モデル クリティカルな思考

1. 研究の背景と目的

(1) 研究の背景

算数・数学の学習では、数学的活動の充実が求められる。根本(1999)は、数学的活動について、「物や道具を用いたり、身体を動かしたりして考える physical な側面と、頭の中で考える mental な側面がある」(根本、1999、p.27)とし、次のように整理している。

- ア) 計算処理や図形の具体的な操作など客観的に観察が可能な活動 (外的行為)
- イ) 類推したり、振り返って考えたりするなどの内的な活動 (内的行為)

問題解決に向けて学習者が徹底的に考える中で両者は相互に作用し、次第に本質が明らかになり、概念の拡張や統合が図られるようにすることが大切である。しかし、内的行為は目に見えないため、観察可能な外的行為の背景で、どのような思考が行われているのか、また、思考の質はどうかを把握することは難しく、評価に基づいた指導の実現を困難にしている。

(2) 研究の目的

本研究の目的は、統計モデルの作成と解釈における学習者の思考について考察することにより、統計資料のモデル化を取り入れた問題解決学習に対する示唆を得ることである。本稿では、リアルデータに基づいた問題解決学習における統計モデルの作成と、その解釈に焦点を当てることとし、筆者の授業実践である「桜の開花予想」を取り上げ、考察の対象とする。

2. 「クリティカルな思考」と「問題の4要素」

(1) クリティカルな思考

critical は、一般的に「批判的」と訳されるが、宮元ら (1996) は、「適切な規準や根拠に基づく、論理的で、偏りのない思考」(宮元ら、1996、p.4)、「人間が陥りやすい思考の落とし穴や、先入観を自覚した上で、そこから脱却し、ものごとを慎重に、偏りなく、合理的に考え、判断していくこと」(宮元ら、1997、p. ii) を「クリティカルな思考」とし、自分自身の思考を内省する内的行為が重視される良質な思考であり、単なる批判とは異なる思考だと述べている。そこで、本稿では、一般的に用いられる「批判的思考」とは質が異なる思考を表す言葉として「クリティカルな思考」という表現を用いる。

Ellen Langer (1978) は、細かな情報まで吟味し、互いの関係を整理してよく考える傾向を「マインドフル」と呼び、細かいところに注意を払わず、決まった方法で深く考えず行動する傾向を「マインドレス」としている。問題解決では、漠然と考えながら解決に至るというよりも、段階を踏んで考えを精緻なものにしていくことが要求され、クリティカルな思考が行われるものと考えている。なお、問題解決へのアプローチとして、G.Polya は次の4段階を示している。

- I 問題を理解すること
- II 計画を立てること
- III 計画を実行すること
- IV 振り返ってみること

このうち、段階 I 「問題を理解する」には「問題の発見」を含むものとする。

(2) 問題の4要素

問題には、目標や解決の道筋が明確なもの(定義明確問題)と、そうでない問題(定義不明確問題)がある。数学の問題の多くは前者に含まれると考えられがちだが、問題解決学習では、むしろ後者に属する問題を

扱うことが推奨され、問題を捉えた後、問題を分析することが必要になる。宮元ら (1997) は、問題には右の4つの基本要素があるとしている。

目標：問題が解決された状況 道具：目標達成のために使える道具や材料 操作：目標達成のための手順や方法 制約：行為の制限や遵守すべき規則
--

3. 統計モデルの作成と解釈におけるクリティカルな思考

本稿では、統計モデルを用いた問題解決学習「桜の開花予想」における学習者の数学的活動に沿って、クリティカルな思考を検証する。その際、「クリティカルな思考」と「問題の4要素の所在」との関連を明らかにする。なお、統計モデルとは「不確実性を考慮し

なければならない現実の諸現象に対する数理モデル一般」(渡辺、2016、p.71)と定義する。

(1) 最初の問題と解決の様子

中学校2学年の関数領域の学習において、H市の桜(ソメイヨシノ)の開花予想を扱った。過去21年間の3月の平均気温と桜の開花日のデータから、2005年の桜の開花日を予想するものである(最初の問題)。問題解決の前提として、3月の平均気温と桜の開花日には相関関係があるものと仮定し、「3月が暖かい年は、桜は早く開花する」という、実体験に基づいた暗黙の了解がある。生徒は、横軸を3月の平均気温、縦軸を開花日として相関図をつくり、点の並び方から適切だと考えられる統計モデルとしての回帰グラフを表示し(図1)、これに基づいて予測値を求め、開花日を予想した。

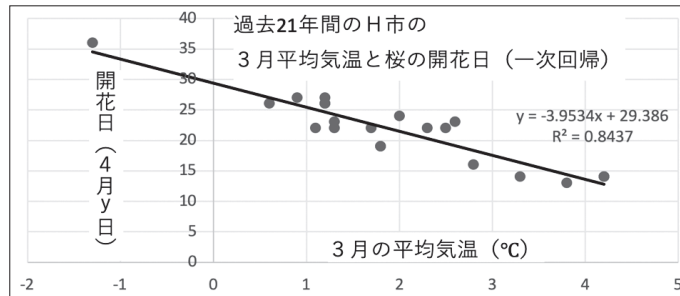


図1 過去21年間の3月の平均気温と桜の開花日

回帰グラフの式(一次回帰式) $y = -3.9534x + 29.386$ に $x = 1$ を代入して $y = 25.4326$ 、これより予想開花日は4月25日となる。実際の開花日である28日と照合し、ある程度正確に予想できたことを認めた。

(2) A生の追究(数学的活動)

① 新たな問題の発見

多くの生徒は、最初の問題で作成した相関図の点の並び方が概ね右下がりに見えることから、一次回帰グラフを用いて結論を導いた。しかし、直線での理由は点の並び方から得られる印象以外には見当たらない。3月が暖かいと開花日が早くなるという経験知は肯定されても、直線での理由としては脆弱である。これは、細かいところに注意を払わず、決まった方法で深く考えずに一次回帰グラフを求めて結論を得ている状況だと考えられる(マインドレス・外的行為)。これに対し、A生は、直線で回帰してよいと言い切れるのか疑問をもち、追究内容を懐疑的に振り返った。A生は、相関図に基づいて得られた一次回帰グラフを観察しながら、「直線がベストなのか。3月の平均気温以外は毎年同じ環境だったとすることも不自然だ。」と述べ、新たな問題の発見に至った。

【新たな問題の発見】

桜前線は基本的に北上するが、これに沿わない地域もある。だから、3月の平均気温と開花日だけを用いて直線をかいてしまうことがよいのかどうか怪しい。3月の平均気温以外にも、緯度経度や標高など桜の開花に影響する要因がありそうだから、これらを使ってもっと正確に桜の開花日を予想することができるのではないかと考えた。

② 計画立案から問題解決

桜の開花日は、3月の平均気温だけで決まるのではなく、様々な気象条件、観測地の標高、位置などの影響を受けるのではないかと考えた。

【計画立案】

緯度経度や標高などの全てを説明変数として桜の開花日を予想することは難しいが、様々な地域の3月の平均気温と桜の開花日との相関を調べれば、平均気温以外にも必ずと何らかの影響が作用した結果が得られるだろう。そこで、2005年の全国各地（73地域）の3月の平均気温と桜の開花日について調べ、このデータを用いて解決を試みることにする。

【計画実行1】

調べたデータは表1の通りである。このデータの相関図（図2）をつくり、より適切な統計モデルの判断を試みた。計画実行1に向けて、問題の4つの基本要素「目標・道具・操作・制約」を示したところ、A生は次のように整理した。

目標：全国各地の3月の平均気温と桜の開花日の相関図から適切な回帰グラフとその式を求め、より正確な開花日を予想する。

道具：表1のデータ、相関図、テクノロジー、回帰グラフ、回帰式

操作：相関図を観察しながら、適切と思われる回帰グラフを選択して式を求め、当該地域の3月の平均気温が1℃であることから $x = 1$ を代入して y の値を求める。

制約：回帰グラフはテクノロジーで求める。勝手に適当な直線などのかいたものは、回帰グラフではない。

A生は、これらの基本要素を前提に追究し、まず相関図（図2）をつくり、観察した。

表1 2005年3月地域別平均気温と開花日

市町村	3月平均気温 (x℃)	開花4月y日	市町村	3月平均気温 (x℃)	開花4月y日	市町村	3月平均気温 (x℃)	開花4月y日
札幌	0.1	40	館山	9.7	3	大阪	9.2	3
網走	-1.8	51	鏡子	8	7	神戸	9	3
旭川	-1.8	44	八丈島	11.9	8	豊岡	6.1	7
釧路	-1	52	大島	10	-2	奈良	7.1	2
帯広	-1.4	34	横浜	9	2	和歌山	9.2	1
蒲河	0.3	46	甲府	7.6	-1	鳥取	6.7	5
函館	0.9	35	長野	3	14	松江	7	5
倶知安町	-1.5	44	松本	3.8	9	浜田	8.5	1
根室	-1.4	51	飯田	4.9	9	岡山	8.4	3
留萌郡	-0.4	50	新潟	5	14	広島	8.1	3
紋別	-1.3	51	富山	5.9	8	徳島	9.4	-1
稚内	-1	53	金沢	6.8	7	高松	8.8	1
青森	1.4	29	福島	6.1	7	宇和島	9	-3
八戸	2.1	27	輪島	5.3	10	松山	8.7	1
盛岡	1.1	23	敦賀	7.4	6	下関	9.4	-1
宮古市	2.9	18	高山	1.8	17	福岡	9.6	-2
仙台	4.1	14	岐阜	7.8	2	佐賀	8.8	-1
秋田	3	24	浜松	9.1	2	長崎	9.6	-1
山形	2.4	19	静岡	10	-2	熊本	8.2	1
酒田	4.3	19	名古屋	7.8	-1	大分	8.4	-1
福島	4.4	11	尾鷲	9.1	2	宮崎	10.7	-3
水戸	5.8	6	津	8.2	3	種子島	12.9	-1
宇都宮	6.1	6	彦根	6.4	6	鹿児島	10.9	3
前橋	6.6	6	京都	7.7	2			
熊谷	7.2	4	舞鶴	6.5	7			

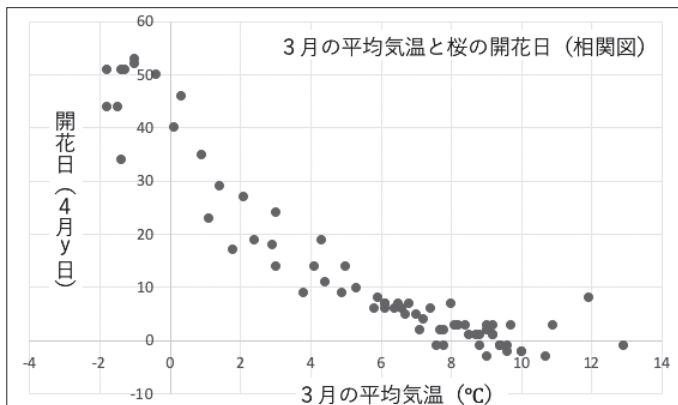


図2 相関図

点の並び方の概形は、右下がりになっていると捉えることができる。そこで、最初の問題の解決に倣い、一次回帰グラフと式を求めた (図 3)。

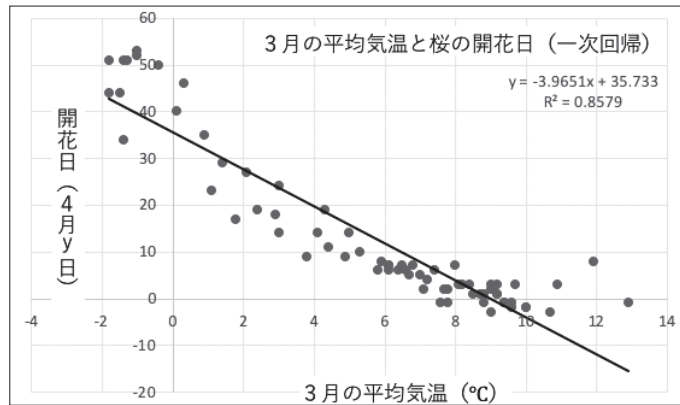


図 3 一次回帰グラフ

式は $y = -3.9651x + 35.733$ 、ここに $x = 1$ を代入すると $y = 31.7679$ となり、開花日は 4 月 32 日、つまり 5 月 2 日と予想することができる。

【振り返り 1】

実際の開花日 (4 月 28 日) と照合すると 4 日ずれていることになる。そこで、統計モデルとして一次回帰グラフと式を用いたことを見直し、点の並び方が若干曲がっているように見えることから、曲線のグラフで回帰して予測値を求めることとした。

【計画実行 2】

A 生は、リストの中から多項式を選んで二次回帰グラフと式を表示し (図 4)、予測値を求めて予想することを試みた。

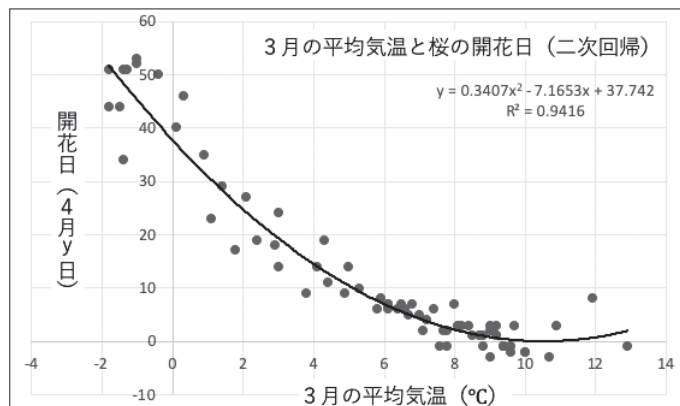


図 4 二次回帰グラフ

式は $y = 0.3407x^2 - 7.1653x + 37.742$ となり、ここに $x = 1$ を代入して $y = 30.9174$ が得られ、開花日は 5 月 1 日と予想することができる。

【振り返り 2】

統計モデルとして二次回帰グラフを用いた予想開花日の方が、実際の開花日に近いことはわかる。このことに加え、A 生は、「3 月の平均気温が高い所では、確かに桜の

開花は早いですが、8℃以上ではほとんど違いが出ない。これは、桜の成長が早くなっても、開花に至るまでには時間がかかるということだろう。」と述べている。点の並び方に対して感覚的に適切だと感じるグラフを選んで予想しただけではなく、自分が行ったことの意味を振り返り、新たな解釈を行っている。

③ A 生の思考の考察

問題解決学習では、学習者が問題を解釈した後、その結論を得て終わることが多い。特にオープンな問題については、得られた結果がある程度妥当だと判断された時点で解決されたとすることが多く、解決の過程を見直す機会が失われがちである。これは、「細かいところに注意を払わず、決まった方法で深く考えず行動する傾向（マインドレス）」と捉えられる。

A 生は、「最初の問題」を解決して終わるのではなく、解決の過程を振り返ることで新たな問題を発見し、解決に向けて計画立案し、実行している。その過程では統計モデルを作成して解釈を試み、改めて統計モデルを修正して解釈を試みている。つまり、A 生の思考は、「細かな情報まで吟味し、互いの関係を整理してよく考える傾向（マインドフル）」と捉えられる。この傾向は、自分で導いた結果を見直し、より適切な結果を求めようとする思考の表れであり、自分自身の思考を内省する内的行為が重視される良質な思考、つまりクリティカルな思考の表れだと考えられる。

問題を捉えてすぐに解決を試みる場合でも、経験に基づいて適切な判断を行い、無意識の内に内省しながら理想的な結果を得るに至ることもある。また、計画実行は目に見える行為（外的行為）ではあるが、実行しながら内的行為を繰り返していることもある。つまり、外的行為と内的行為を明確に分類することはできないが、A 生の追究においては内的行為の繰り返しによって思考の質が高められているものと解釈できる。したがって、問題解決過程において、生徒の内的行為をいかに促し位置付けるか、無意識に行っている可能性のある内的行為をいかに学習者自身が認知できるようにするか、これらの手立てを明確にして行うことが学習者のクリティカルな思考を具体化するために重要な意味をもつものと考えられる。なお、内的行為、外的行為とクリティカルな思考について、現時点では図5のようにまとめておくが、これについては今後さらなる検討を要する。

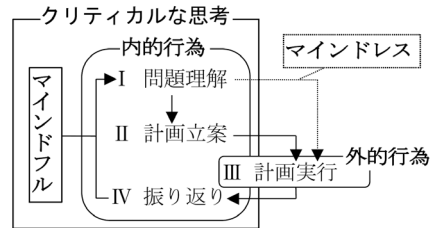


図5 内的行為、外的行為とクリティカルな思考

4. 教材の発展性

(1) 統計モデルを再度振り返る

統計モデルとして二次回帰グラフを用いた場合、yの最小値が存在するため、3月の平均気温が10℃を超えた辺りから桜の開花日は却って遅くなるという予想になるが、これは自然現象から考えて明らかに不自然である。このことを踏まえ、次の条件を満たす統計モデルを考えてみる。

- ・「3月の平均気温が一定程度を越えると、桜の開花は遅くなる」という矛盾（違和感）が生じないモデル

・ 3月の平均気温が極めて低くても桜は必ず開花するため、どこかに限界（漸近線）が存在するモデル

そこで、指数関数を用いて統計モデルを作成してみる。その際、 y のデータに負の数があるため、便宜上全ての y のデータに5を加えて正の数とする。指数回帰グラフは図6のようになる。

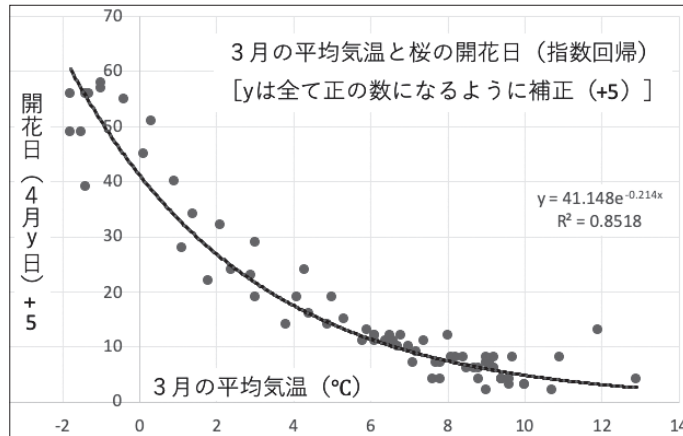


図6 指数回帰グラフ

回帰式は $y = 41.148e^{-0.214x}$ となるので、この式に $x = 1$ を代入して $y = 33.2179$ 、この値から5をひいて $y = 28.2179$ 、よって、桜の開花日は4月28日と予想でき、実際の開花日と一致する。

(2) データを層別し俯瞰する

本教材は、データに対して線形性が認められるか、他の関数で回帰したらどうなるかを探ることが実現できる。つまり、線形回帰のみに偏りがちな視点を見直すという意味で価値がある。また、各地域の緯度や地方ごとに層別して相関をみる活動を実現できる可能性もある。例えば、相関図について日本を天気予報区分の北日本、東日本、西日本で層別して俯瞰すると図7のようになり、3月の平均気温が桜の開花に及ぼす影響は寒い地域の方が大きいということも解釈できる。

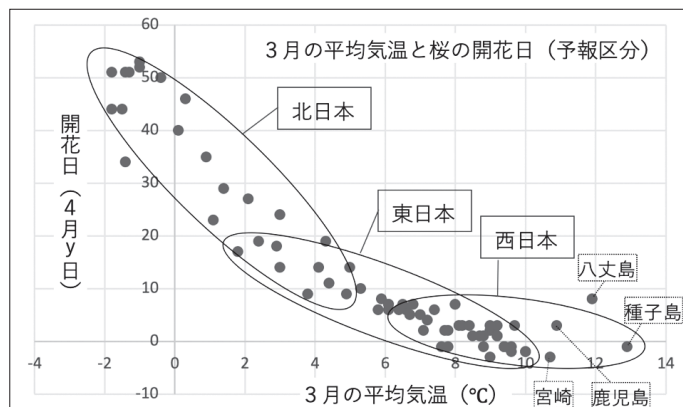


図7 天気予報区分による層別

二次回帰グラフで予想を行った場合、3月の平均気温が10℃を超えた辺りから桜の開花日は却って遅くなるということについて懐疑的に振り返ったが、二次回帰グラフの決定係数(相関係数の2乗)は0.9416で、数学的には既出の回帰グラフの中で最も理想的なものだと言える。これは、3月の平均気温が高い地域における桜の開花日が不自然に遅いことによるものと考えられる。3月の平均気温が高い4地域(図8)については、概ね次のように捉えることができる。

《宮崎・鹿児島・種子島》九州本島の南方。種子島は鹿児島県の離島。鹿児島県は北と南で気候が大きく異なり、温帯と亜熱帯にまたがる。種子島の西に位置する屋久島には冷温帯もある。

《八丈島》東京都の離島。年間を通して比較的温暖で、雨量が多く湿度が高い。オオシマザクラが多く自生し、ソメイヨシノはわずか数本。ソメイヨシノはオオシマザクラとエドヒガンザクラの交配種。

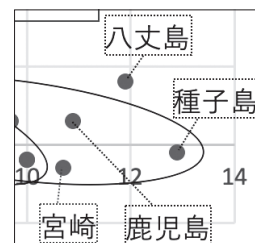


図8 3月の平均気温が高い4地域

これらのことから、それぞれの気候や植生に特徴があり、何らかの影響を与えている可能性があるものと考えられる。

また、2016年に太平洋側の温暖な地域の開花が遅くなったことに関わり、気象予報士の檜山靖洋氏は、春先が暖かくても桜の開花が遅くなる場合もあるとして、その理由を「休眠打破(初冬に桜の芽が休眠し、真冬の寒さで目を覚ます現象)後に暖かさで成長して開花する。真冬に一定期間寒さにさらされることも桜の開花には必要。冬の気温が高かったため、温暖な地域では休眠打破がうまくいかず、桜のつぼみは目覚めが悪かった可能性がある。」(気象キャスターが解説! 天気のみカタ連載第4回「桜開花に寒さも大切」)と述べている。

これらのことから、二次回帰グラフの妥当性について改めて考えたり、気候や植生の似通った地域のデータに絞って予想したりすることの必要性が見えてくる。つまり、「正確な予想ができたから、これでよい」とするのではなく、問題解決の過程を振り返り、新たな問題を発見して解釈し、計画立案すること(マインドフル・内的行為)が、数学的活動におけるクリティカルな思考の具体に迫る可能性があるものと考えられる。

5. まとめと今後の課題

(1) まとめ

良質な思考であるクリティカルな思考を具体化するために、次のことが有効であることが示唆された。

- ・4つの要素「目標・道具・操作・制約」について整理する活動を位置付けること。
- ・マインドフルな内的行為の内、特に振り返りの場面で不自然な部分や矛盾を指摘できるようにすること。

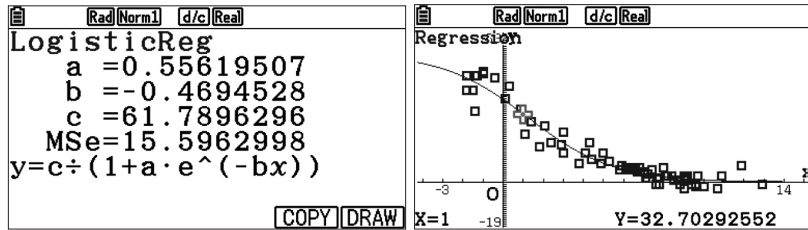
(2) 今後の課題

クリティカルな思考にも多様な質があると考えられる。また、クリティカルな思考ができるようにするには、自分自身の思考を客観的に評価することが欠かせない。そのため、メタ認知的活動、モニタリング、コントロールの視点を研究に取り入れることにより、学習者

がクリティカルな思考を行いながら、その質を高める学習指導について示唆を得ることを、今後の課題とする。

《桜の開花予想》に関する補足》

ロジスティック関数で回帰すると、回帰グラフの式とグラフは次のように求められ、桜の開花日は5月2日だと予想することができる。



$$y = \frac{61.7896296}{1 + 0.55619507e^{-0.4694528x}}$$

ロジスティック関数は、生物の個体数の変化の様子を表す数理モデルの一つで、ある一種の生物が一定環境内で増殖するようなときに、その生物の個体数の変動を予測する場合に用いられる。人口の変動を表すモデルでもある。

桜の開花の現象は生物の個体数の変化とは異なるが、ロジスティック関数は自然界に多く見られる数理モデルで、上限と下限が存在するため、ロジスティック関数による回帰も試してみた。結果として、一つのモデルとして位置付けられそうではあるが、このモデルを積極的に採用する合理的な理由は見当たらない。

なお、筆者が用いた表計算ソフトにはロジスティック関数による回帰の機能がないため、ここではグラフ関数電卓を用いた。

引用・参考文献

- Ellen Langer (1978). The Mindlessness of sensibly Thoughtful Action : The Role of "Placebic" Information in Interpersonal Interaction. *Journal of Personality and Social Psychology*, 36 (6), 635-642
- E.B.Zechmeister., & J.E.Johnson, 宮元博章, 道田泰司, 谷口高士, 菊池聡訳 (1996). *クリティカルシンキング入門編*. 北大路書房. 4.
- E.B.Zechmeister., & J.E.Johnson, 宮元博章, 道田泰司, 谷口高士, 菊池聡訳 (1997). *クリティカルシンキング実践編*. 北大路書房. ii, 73-75.
- G.Polya, 柿内賢信訳 (1954). *いかにして問題をとくか*. 丸善出版. 9-26.
- 根本博 (1999). *数学的活動と反省的経験*. 東洋館出版社, 24-29.
- 渡辺美智子 (2016). 予測と制御のための統計的モデリング. *日本科学教育学会年会論文集*, 第40巻, 71-74.
- 八丈島ホテルリゾート・アズーロ 海辺のホテル便り (2018). 八丈島で見る桜「オオシマザクラ」. <http://lidoazzurro.blog69.fc2.com/blog-entry-260.html?sp> (2020.4.23最終確認)

鹿児島県. <http://www.pref.kagoshima.jp/kids/aramashi/ritchi.html> (2020.4.23最終確認)

気象キャスターが解説! 天気のみかた連載第4回 「桜開花に寒さも大切」.

https://www.water.go.jp/honsya/honsya/pamphlet/kouhoushi/2017/pdf/2017_03-04_10.pdf#search=%27八丈島+気候+桜%27 (2020.4.23最終確認)

Received : April, 24, 2020

Accepted : June, 10, 2020